3. cvičení - teorie

Definice 1 (Parciální derivace)**.** Nechť f je funkce n proměnných, $j \in \{1,\dots,n\}, a \in \mathbb{R}^n$. Pak číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} = \\ = \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{t}$$

nazýváme *parciální derivací (prvního řádu) funkce* f podle j -té proměnné v bodě a (pokud limita existuje).

Notace 2. Derivaci funkce f podle j-té proměnné značíme mimo jiné také jako f'_{x_j}

Parciální derivace počítáme v podstatě tak, že jiné proměnné, než je x_j bereme jako čísla.

Fakt 3. Aritmetika derivací proto funguje pořád stejně.
$(f \pm g)' = f' \pm g'$
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f g'}{g^2}$

Definice 4. Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v k-té proměnné v bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud $\lim_{t\to 0} f(a+te_k) = f(a)$

Fakt. Je-li funkce f spojitá v bodě a v k-té proměnné, pak co se výpočtu $f'_k(a)$ týče, můžeme používat věty z minulého semestru - např. větu 44.

Definice 5. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n, a \in G, f \in \mathbb{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a)\cdot(x_i - a_i)$$

je *tečná nadrovina* fe grafu funkce f v bodě a.

Definice 6. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$, pak množinu $[f = c]$ [1] nazýváme *vrstevnicí funkce f ve výšce c.*

[1] Užíváme notaci $[V(x)] = \{x \in \mathbb{R}^n \colon V(x)\}$.

Návod

- $D(f)$ - určit a nakreslit
- určím, zda je funkce definovaná po větvích - v tom případě si nakreslím množiny, na kterých má různé předpisy
- zjistím, zda a kde je funkce spojitá (potřeba např. k větě 44)
- Ve vnitřcích získaných množin vypočítám parciální derivace
- pokud je funkce na hrnaicích množin definována, spočtu zde derivace zvlášť - z definice/dle věty 44.
  - Aby paricální derivace dávala smysl, musí být funkce definována na úsečce procházející daným bodem v příhodném směru (např., pokud funkce není těsně nad bodem x definována, nemá smysl tam počítat derivaci podle y.)